Linealidad sintáctica e hiperdoctrinas Lineales para Lógica Lineal intuicionista con cuantificación de segundo orden

---

Malena Ivnisky

Universidad de Buenos Aires (Argentina)
Universidad de la República (Uruguay)

en colaboración con Alejandro Díaz-Caro y Octavio Malherbe

Seminario FormAL

30 de septiembre, 2026

Estructura de la charla

- Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$

Estructura de la charla

- Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$
- Propiedad de linealidad sintáctica

Estructura de la charla

- Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$
- Propiedad de linealidad sintáctica
- Modelo categórico abstracto

Estructura de la charla

- Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$
- Propiedad de linealidad sintáctica
- Modelo categórico abstracto
- Modelo concreto (wip)

- Extensión del cálculo $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ [1]

[1] Díaz-Caro and Dowek – MSCS 2024

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Extensión del cálculo $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ [1]
- $\mathcal{S}$ = semianillo conmutativo

[1] Díaz-Caro and Dowek – MSCS 2024

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Extensión del cálculo $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ [1]
- $\mathcal{S}$ = semianillo conmutativo
- Términos = pruebas de ILL + $\forall$

$$A ::= A \multimap A \mid A \otimes A \mid \mathbf{1} \mid A \,\&\, A \mid \top \mid A \oplus A \mid \mathbf{0} \mid !A \mid X \mid \forall X.A$$

[1] Díaz-Caro and Dowek – MSCS 2024

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Extensión del cálculo $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ [1]
- $\mathcal{S}$ = semianillo conmutativo
- Términos = pruebas de ILL + $\forall$

$$A ::= A \multimap A \mid A \otimes A \mid \mathbf{1} \mid A \,\&\, A \mid \top \mid A \oplus A \mid \mathbf{0} \mid !A \mid X \mid \forall X.A$$

[1] Díaz-Caro and Dowek – MSCS 2024

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Extensión del cálculo $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ [1]
- $\mathcal{S}$ = semianillo conmutativo
- Términos = pruebas de ILL + $\forall$

$$A ::= A \multimap A \mid A \otimes A \mid \mathbf{1} \mid A \,\&\, A \mid \top \mid A \oplus A \mid \mathbf{0} \mid !A \mid X \mid \forall X.A$$

- Polimorfismo paramétrico

Naturales	$\forall X.X \multimap !(X \multimap X) \multimap X$
Listas	$\forall X.X \multimap !(A \multimap X \multimap X) \multimap X$

[1] Díaz-Caro and Dowek – MSCS 2024

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Extensión del cálculo $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ [1]
- $\mathcal{S}$ = semianillo conmutativo
- Términos = pruebas de ILL + $\forall$

$$A ::= A \multimap A \mid A \otimes A \mid \mathbf{1} \mid A \,\&\, A \mid \top \mid A \oplus A \mid \mathbf{0} \mid !A \mid X \mid \forall X.A$$

- Polimorfismo paramétrico

Naturales	$\forall X.X \multimap !(X \multimap X) \multimap X$
Listas	$\forall X.X \multimap !(A \multimap X \multimap X) \multimap X$

- Muchas pruebas de $\mathbf{1}$

$$\frac{}{\vdash \star_a : \mathbf{1}}\ \mathbf{1}_i(a) \qquad \text{en lugar de} \qquad \frac{}{\vdash \star : \mathbf{1}}\ \mathbf{1}_i$$

(con $a \in \mathcal{S}$)

[1] Díaz-Caro and Dowek – MSCS 2024

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$

- Extensión del cálculo $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ [1]
- $\mathcal{S}$ = semianillo conmutativo
- Términos = pruebas de ILL + $\forall$

$$A ::= A \multimap A \mid A \otimes A \mid \mathbf{1} \mid A \,\&\, A \mid \top \mid A \oplus A \mid \mathbf{0} \mid !A \mid X \mid \forall X.A$$

- Polimorfismo paramétrico

Naturales	$\forall X.X \multimap !(X \multimap X) \multimap X$
Listas	$\forall X.X \multimap !(A \multimap X \multimap X) \multimap X$

- Muchas pruebas de $\mathbf{1}$

$$\frac{}{\vdash \star_a : \mathbf{1}}\ \mathbf{1}_i(a) \qquad \text{en lugar de} \qquad \frac{}{\vdash \star : \mathbf{1}}\ \mathbf{1}_i$$

(con $a \in \mathcal{S}$)

- Reglas admisibles

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t \mathbin{\boldsymbol{+}} u : A}\ \text{sum} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash a \bullet t : A}\ \text{prod}(a)$$

(con $a \in \mathcal{S}$)

[1] Díaz-Caro and Dowek – MSCS 2024

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: reglas de conmutación

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

$(X \notin \mathsf{fv}(\Gamma))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A}\ \forall_i \quad \dfrac{\Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.u : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash (\Lambda X.t) + (\Lambda X.u) : \forall X.A}\ \mathsf{sum}}{\Gamma \vdash ((\Lambda X.t) + (\Lambda X.u))\ B : A[X := B]}\ \forall_e$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: reglas de conmutación [Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

$(X \notin \mathsf{fv}(\Gamma))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A}\ \forall_i \quad \dfrac{\Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.u : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash (\Lambda X.t) + (\Lambda X.u) : \forall X.A}\ \mathsf{sum}}{\Gamma \vdash ((\Lambda X.t) + (\Lambda X.u))\ B : A[X := B]}\ \forall_e \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t + u : A}\ \mathsf{sum}}{\Gamma \vdash \Lambda X.t + u : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash (\Lambda X.t + u)\ B : A[X := B]}\ \forall_e$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: reglas de conmutación [Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

$(X \notin \mathsf{fv}(\Gamma))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A}\ \forall_i \quad \dfrac{\Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.u : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash (\Lambda X.t) + (\Lambda X.u) : \forall X.A}\ \mathsf{sum}}{\Gamma \vdash ((\Lambda X.t) + (\Lambda X.u))\ B : A[X := B]}\ \forall_e \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t + u : A}\ \mathsf{sum}}{\Gamma \vdash \Lambda X.t + u : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash (\Lambda X.t + u)\ B : A[X := B]}\ \forall_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash a \bullet \Lambda X.t : \forall X.A}\ \mathsf{prod}(a)$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: reglas de conmutación

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

$(X \notin \mathsf{fv}(\Gamma))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A}\ \forall_i \quad \dfrac{\Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.u : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash (\Lambda X.t) + (\Lambda X.u) : \forall X.A}\ \mathsf{sum}}{\Gamma \vdash ((\Lambda X.t) + (\Lambda X.u))\ B : A[X := B]}\ \forall_e \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t + u : A}\ \mathsf{sum}}{\Gamma \vdash \Lambda X.t + u : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash (\Lambda X.t + u)\ B : A[X := B]}\ \forall_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A}\ \forall_i}{\Gamma \vdash a \bullet \Lambda X.t : \forall X.A}\ \mathsf{prod}(a) \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash a \bullet t : A}\ \mathsf{prod}(a)}{\Gamma \vdash \Lambda X.a \bullet t : \forall X.A}\ \forall_i$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: linealidad sintáctica

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Si t es una prueba cerrada de $A \multimap B$, entonces:

$$t\ (u \mathbin{+\!\!+} v) \sim t\ u \mathbin{+\!\!+} t\ v$$
$$t\ (a \bullet u) \sim a \bullet (t\ u)$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: linealidad sintáctica

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Si t es una prueba cerrada de $A \multimap B$, entonces:

$$t\ (u \mathbin{+} v) \sim t\ u \mathbin{+} t\ v$$
$$t\ (a \bullet u) \sim a \bullet (t\ u)$$

- Ejemplo: codificación de vectores y transformaciones lineales

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: linealidad sintáctica

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Si t es una prueba cerrada de $A \multimap B$, entonces:

$$t\ (u \mathbin{+} v) \sim t\ u \mathbin{+} t\ v$$
$$t\ (a \bullet u) \sim a \bullet (t\ u)$$

- Ejemplo: codificación de vectores y transformaciones lineales

$$\langle \star_1, \star_0 \rangle \mathbin{+} \langle \star_0, \star_1 \rangle$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: linealidad sintáctica

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Si t es una prueba cerrada de $A \multimap B$, entonces:

$$t\ (u \mathbin{+} v) \sim t\ u \mathbin{+} t\ v$$
$$t\ (a \bullet u) \sim a \bullet (t\ u)$$

- Ejemplo: codificación de vectores y transformaciones lineales

$$\langle \star_1, \star_0 \rangle \mathbin{+} \langle \star_0, \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1 \mathbin{+} \star_0, \star_0 \mathbin{+} \star_1 \rangle$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: linealidad sintáctica

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Si t es una prueba cerrada de $A \multimap B$, entonces:

$$t\ (u + v) \sim t\ u + t\ v$$
$$t\ (a \bullet u) \sim a \bullet (t\ u)$$

- Ejemplo: codificación de vectores y transformaciones lineales

$$\langle \star_1, \star_0 \rangle + \langle \star_0, \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1 + \star_0, \star_0 + \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1, \star_0 + \star_1 \rangle$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: linealidad sintáctica

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Si t es una prueba cerrada de $A \multimap B$, entonces:

$$t\ (u \mathbin{+} v) \sim t\ u \mathbin{+} t\ v$$
$$t\ (a \bullet u) \sim a \bullet (t\ u)$$

- Ejemplo: codificación de vectores y transformaciones lineales

$$\langle \star_1, \star_0 \rangle \mathbin{+} \langle \star_0, \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1 \mathbin{+} \star_0, \star_0 \mathbin{+} \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1, \star_0 \mathbin{+} \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1, \star_1 \rangle$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: linealidad sintáctica

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Si t es una prueba cerrada de $A \multimap B$, entonces:

$$t\ (u \mathbin{+} v) \sim t\ u \mathbin{+} t\ v$$
$$t\ (a \bullet u) \sim a \bullet (t\ u)$$

- Ejemplo: codificación de vectores y transformaciones lineales

$$\langle \star_1, \star_0 \rangle \mathbin{+} \langle \star_0, \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1 \mathbin{+} \star_0, \star_0 \mathbin{+} \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1, \star_0 \mathbin{+} \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1, \star_1 \rangle$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se codifica como $t = \lambda x.(\pi_1(x); \langle \star_0, \star_1 \rangle) \mathbin{+} (\pi_2(x); \langle \star_1, \star_0 \rangle)$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: linealidad sintáctica

[Díaz-Caro, Dowek, Ivnisky y Malherbe – WoLLIC 2024]

- Si t es una prueba cerrada de $A \multimap B$, entonces:

$$t\ (u \mathbin{+} v) \sim t\ u \mathbin{+} t\ v$$
$$t\ (a \bullet u) \sim a \bullet (t\ u)$$

- Ejemplo: codificación de vectores y transformaciones lineales

$$\langle \star_1, \star_0 \rangle + \langle \star_0, \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1 + \star_0, \star_0 + \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1, \star_0 + \star_1 \rangle \longrightarrow \langle \star_1, \star_1 \rangle$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se codifica como $t = \lambda x.(\pi_1(x); \langle \star_0, \star_1 \rangle) + (\pi_2(x); \langle \star_1, \star_0 \rangle)$

$$t\ \langle \star_1, \star_0 \rangle \longrightarrow^* \langle \star_0, \star_1 \rangle$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Codominio de la hiperdoctrina

- $(\mathrm{SM}_{\mathcal{S}}, \otimes, \mathcal{S})$ una categoría de $\mathcal{S}$-semimódulos

[2] G.M. Bierman - Tesis de doctorado, 1994

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Codominio de la hiperdoctrina

- $(\mathrm{SM}_{\mathcal{S}}, \otimes, \mathcal{S})$ una categoría de $\mathcal{S}$-semimódulos
- Definición: categoría Lineal[2]

[2] G.M. Bierman - Tesis de doctorado, 1994

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Codominio de la hiperdoctrina

- $(\mathrm{SM}_{\mathcal{S}}, \otimes, \mathcal{S})$ una categoría de $\mathcal{S}$-semimódulos
- Definición: categoría Lineal[2]
  1. Categoría simétrica monoidal cerrada $(\mathcal{L}, \otimes, I)$ con productos y coproductos finitos

[2] G.M. Bierman - Tesis de doctorado, 1994

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Codominio de la hiperdoctrina

- $(\mathrm{SM}_{\mathcal{S}}, \otimes, \mathcal{S})$ una categoría de $\mathcal{S}$-semimódulos
- Definición: categoría Lineal[2]
  1. Categoría simétrica monoidal cerrada $(\mathcal{L}, \otimes, I)$ con productos y coproductos finitos
  2. ...con una comónada monoidal simétrica $(!, \varepsilon, \delta, m_{A,B}, m_I)$ + más propiedades

[2] G.M. Bierman - Tesis de doctorado, 1994

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Codominio de la hiperdoctrina

- $(\mathsf{SM}_{\mathcal{S}}, \otimes, \mathcal{S})$ una categoría de $\mathcal{S}$-semimódulos
- Definición: categoría Lineal[2]
  1. Categoría simétrica monoidal cerrada $(\mathcal{L}, \otimes, I)$ con productos y coproductos finitos
  2. ...con una comónada monoidal simétrica $(!, \varepsilon, \delta, m_{A,B}, m_I)$ + más propiedades
- Categoría $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}$: una categoría Lineal, $\mathsf{SM}_{\mathcal{S}}$-enriquecida, tal que el mapa

$$a \mapsto a \cdot id_I : \mathcal{S} \to \mathsf{Hom}\,(I, I)$$

es monomorfismo de semimódulos.

[2] G.M. Bierman - Tesis de doctorado, 1994

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Codominio de la hiperdoctrina

- $(\mathsf{SM}_{\mathcal{S}}, \otimes, \mathcal{S})$ una categoría de $\mathcal{S}$-semimódulos
- Definición: categoría Lineal[2]
  1. Categoría simétrica monoidal cerrada $(\mathcal{L}, \otimes, I)$ con productos y coproductos finitos
  2. ...con una comónada monoidal simétrica $(!, \varepsilon, \delta, m_{A,B}, m_I)$ + más propiedades
- Categoría $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}$: una categoría Lineal, $\mathsf{SM}_{\mathcal{S}}$-enriquecida, tal que el mapa

$$a \mapsto a \cdot id_I : \mathcal{S} \to \mathsf{Hom}\,(I, I)$$

es monomorfismo de semimódulos.

$$\begin{aligned} [\![A \otimes B]\!] &= [\![A]\!] \otimes [\![B]\!] & [\![1]\!] &= I \\ [\![A \,\&\, B]\!] &= [\![A]\!] \times [\![B]\!] & [\![\top]\!] &= \mathbf{1} \\ [\![A \oplus B]\!] &= [\![A]\!] + [\![B]\!] & [\![0]\!] &= \mathbf{0} \\ [\![A \multimap B]\!] &= [[\![A]\!], [\![B]\!]] & [\![!A]\!] &= ![\![A]\!] \end{aligned}$$

[2] G.M. Bierman - Tesis de doctorado, 1994

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Definición de la hiperdoctrina[3]

$$\mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$$

- Categoría del codominio $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$: categoría de modelos de ILL

[3] Adaptada de Roy L. Crole - Categories for types, 1993

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Definición de la hiperdoctrina[3]

$$\mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$$

- Categoría del codominio $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$: categoría de modelos de ILL
- Categoría base $\mathcal{C}$: productos finitos de U

[3] Adaptada de Roy L. Crole - Categories for types, 1993

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Definición de la hiperdoctrina[3]

$$\mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$$

- Categoría del codominio $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$: categoría de modelos de ILL
- Categoría base $\mathcal{C}$: productos finitos de U
- $[\![A]\!]^n \in ob\mathcal{C}(U^n, U)$

[3] Adaptada de Roy L. Crole - Categories for types, 1993

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Definición de la hiperdoctrina[3]

$$\mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$$

- Categoría del codominio $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$: categoría de modelos de ILL
- Categoría base $\mathcal{C}$: productos finitos de U
- $[\![A]\!]^n \in ob\mathcal{C}(U^n, U) \qquad [\![\Upsilon; \Gamma \vdash t : A]\!]^n \in mor\mathcal{C}(U^n, U)$

[3] Adaptada de Roy L. Crole - Categories for types, 1993

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Definición de la hiperdoctrina[3]

$$\mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$$

- Categoría del codominio $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$: categoría de modelos de ILL
- Categoría base $\mathcal{C}$: productos finitos de U
- $[\![A]\!]^n \in ob\mathcal{C}(U^n, U) \qquad [\![\Upsilon; \Gamma \vdash t : A]\!]^n \in mor\mathcal{C}(U^n, U)$
- $\pi_n^* \dashv \forall_n : \mathcal{C}(U^n \times U, U) \to \mathcal{C}(U^n, U)$ adjunción $\mathsf{SM}_{\mathcal{S}}$-enriquecida

[3] Adaptada de Roy L. Crole - Categories for types, 1993

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Definición de la hiperdoctrina[3]

$$\mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$$

- Categoría del codominio $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$: categoría de modelos de ILL
- Categoría base $\mathcal{C}$: productos finitos de U
- $[\![A]\!]^n \in ob\mathcal{C}(U^n, U) \qquad [\![\Upsilon; \Gamma \vdash t : A]\!]^n \in mor\mathcal{C}(U^n, U)$
- $\pi_n^* \dashv \forall_n : \mathcal{C}(U^n \times U, U) \to \mathcal{C}(U^n, U)$ adjunción $\mathrm{SM}_{\mathcal{S}}$-enriquecida
- $+$ condición de BC

[3] Adaptada de Roy L. Crole - Categories for types, 1993

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Definición de la hiperdoctrina[3]

$$\mathcal{C}(-, U) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$$

- Categoría del codominio $\mathbf{C}_!^{\mathcal{S}}\mathcal{AT}$: categoría de modelos de ILL
- Categoría base $\mathcal{C}$: productos finitos de U
- $[\![A]\!]^n \in ob\mathcal{C}(U^n, U) \qquad [\![\Upsilon; \Gamma \vdash t : A]\!]^n \in mor\mathcal{C}(U^n, U)$
- $\pi_n^* \dashv \forall_n : \mathcal{C}(U^n \times U, U) \to \mathcal{C}(U^n, U)$ adjunción $\mathsf{SM}_{\mathcal{S}}$-enriquecida
- $+$ condición de BC

$$\begin{aligned}
[\![A \otimes B]\!]^n &= [\![A]\!]^n \otimes [\![B]\!]^n & [\![\mathbf{1}]\!]^n &= I_n \\
[\![A \,\&\, B]\!]^n &= [\![A]\!]^n \times [\![B]\!]^n & [\![\top]\!]^n &= \mathbf{1}_n \\
[\![A \oplus B]\!]^n &= [\![A]\!]^n + [\![B]\!]^n & [\![\mathbf{0}]\!]^n &= \mathbf{0}_n \\
[\![A \multimap B]\!]^n &= [[\![A]\!]^n, [\![B]\!]^n] & [\![!A]\!]^n &= ![\![A]\!]^n \\
[\![\forall X.A]\!]^n &= \forall_n([\![A]\!]^{n+1}) & [\![X]\!]^n &= \pi
\end{aligned}$$

[3] Adaptada de Roy L. Crole - Categories for types, 1993

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Interpretación de los términos/pruebas

$$\frac{[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = T : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n \quad [\![\Gamma \vdash u : A]\!]^n = U : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}{[\![\Gamma \vdash t \mathbin{+} u : A]\!]^n = T + U : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}\ \text{sum}$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Interpretación de los términos/pruebas

$$\frac{[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = T : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n \quad [\![\Gamma \vdash u : A]\!]^n = U : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}{[\![\Gamma \vdash t \mathbin{+} u : A]\!]^n = T + U : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}\ \mathsf{sum}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = T : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}{[\![\Gamma \vdash a \bullet t : A]\!]^n = a \cdot T : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}\ \mathsf{prod}(a)$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Interpretación de los términos/pruebas

$$\frac{[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = T : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n \quad [\![\Gamma \vdash u : A]\!]^n = U : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}{[\![\Gamma \vdash t \mathbin{+} u : A]\!]^n = T + U : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}\ \mathsf{sum}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = T : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}{[\![\Gamma \vdash a \bullet t : A]\!]^n = a \cdot T : [\![\Gamma]\!]^n \to [\![A]\!]^n}\ \mathsf{prod}(a)$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^{n+1} = T : [\![\Gamma]\!]^{n+1} \to [\![A]\!]^{n+1} \quad X \notin \mathsf{fv}(\Gamma)}{[\![\Gamma \vdash \Lambda X.t : \forall X.A]\!]^n = \Phi\,(T) : [\![\Gamma]\!]^n \to \forall_n([\![A]\!]^{n+1})}\ \forall_i$$

$$\vdots$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Soundness

Teorema

Sea $\Gamma \vdash t : A$. Si $t \longrightarrow r$, entonces $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = [\![\Gamma \vdash r : A]\!]^n$.

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Soundness

Teorema
Sea $\Gamma \vdash t : A$. Si $t \longrightarrow r$, entonces $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = [\![\Gamma \vdash r : A]\!]^n$.

Demo (fragmento)

$$\vdots$$

- Regla $(\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) \longrightarrow \Lambda X.u \boldsymbol{+} v$:

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Soundness

Teorema
Sea $\Gamma \vdash t : A$. Si $t \longrightarrow r$, entonces $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = [\![\Gamma \vdash r : A]\!]^n$.

Demo (fragmento)

$$\vdots$$

- Regla $(\Lambda X.u) + (\Lambda X.v) \longrightarrow \Lambda X.u + v$:

$$[\![\Gamma \vdash (\Lambda X.u) + (\Lambda X.v) : \forall X.B]\!]^n$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Soundness

Teorema
Sea $\Gamma \vdash t : A$. Si $t \longrightarrow r$, entonces $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = [\![\Gamma \vdash r : A]\!]^n$.

Demo (fragmento)

$$\vdots$$

- Regla $(\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) \longrightarrow \Lambda X.u \boldsymbol{+} v$:

$$[\![\Gamma \vdash (\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) : \forall X.B]\!]^n$$
$$= \Phi\left([\![\Gamma \vdash u : B]\!]^{n+1}\right) + \Phi\left([\![\Gamma \vdash v : B]\!]^{n+1}\right)$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Soundness

Teorema
Sea $\Gamma \vdash t : A$. Si $t \longrightarrow r$, entonces $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = [\![\Gamma \vdash r : A]\!]^n$.

Demo (fragmento)

$$\vdots$$

- Regla $(\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) \longrightarrow \Lambda X.u \boldsymbol{+} v$:

$$[\![\Gamma \vdash (\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) : \forall X.B]\!]^n$$
$$= \Phi\left([\![\Gamma \vdash u : B]\!]^{n+1}\right) + \Phi\left([\![\Gamma \vdash v : B]\!]^{n+1}\right)$$
$$\Bigg(\text{ la adjunción } \pi_n^* \dashv \forall_n \text{ es enriquecida}$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Soundness

Teorema
Sea $\Gamma \vdash t : A$. Si $t \longrightarrow r$, entonces $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = [\![\Gamma \vdash r : A]\!]^n$.

Demo (fragmento)

$$\vdots$$

- Regla $(\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) \longrightarrow \Lambda X.u \boldsymbol{+} v$:

$$[\![\Gamma \vdash (\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) : \forall X.B]\!]^n$$
$$= \Phi\left([\![\Gamma \vdash u : B]\!]^{n+1}\right) + \Phi\left([\![\Gamma \vdash v : B]\!]^{n+1}\right)$$

$$\left(\text{la adjunción } \pi_n^* \dashv \forall_n \text{ es enriquecida} \implies \begin{cases} \Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g) \\ \Phi(a \cdot f) = a \cdot \Phi(f) \end{cases} \right)$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Soundness

Teorema
Sea $\Gamma \vdash t : A$. Si $t \longrightarrow r$, entonces $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = [\![\Gamma \vdash r : A]\!]^n$.

Demo (fragmento)

$$\vdots$$

- Regla $(\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) \longrightarrow \Lambda X.u \boldsymbol{+} v$:

$$[\![\Gamma \vdash (\Lambda X.u) \boldsymbol{+} (\Lambda X.v) : \forall X.B]\!]^n$$
$$= \Phi\left([\![\Gamma \vdash u : B]\!]^{n+1}\right) + \Phi\left([\![\Gamma \vdash v : B]\!]^{n+1}\right)$$
$$\left(\text{la adjunción } \pi_n^* \dashv \forall_n \text{ es enriquecida} \implies \begin{cases} \Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g) \\ \Phi(a \cdot f) = a \cdot \Phi(f) \end{cases}\right)$$
$$= \Phi\left([\![\Gamma \vdash u : B]\!]^{n+1} + [\![\Gamma \vdash v : B]\!]^{n+1}\right)$$

Teorema
Sea $\Gamma \vdash t : A$. Si $t \longrightarrow r$, entonces $[\![\Gamma \vdash t : A]\!]^n = [\![\Gamma \vdash r : A]\!]^n$.

Demo (fragmento)

$$\vdots$$

- Regla $(\Lambda X.u) + (\Lambda X.v) \longrightarrow \Lambda X.u + v$:

$$[\![\Gamma \vdash (\Lambda X.u) + (\Lambda X.v) : \forall X.B]\!]^n$$
$$= \Phi\left([\![\Gamma \vdash u : B]\!]^{n+1}\right) + \Phi\left([\![\Gamma \vdash v : B]\!]^{n+1}\right)$$
$$\left(\text{la adjunción } \pi_n^* \dashv \forall_n \text{ es enriquecida} \implies \begin{cases} \Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g) \\ \Phi(a \cdot f) = a \cdot \Phi(f) \end{cases}\right)$$
$$= \Phi\left([\![\Gamma \vdash u : B]\!]^{n+1} + [\![\Gamma \vdash v : B]\!]^{n+1}\right)$$
$$= [\![\Gamma \vdash \Lambda X.u + v : \forall X.B]\!]^n$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Adequacy

Lema (Completeness del tipo $\mathtt{1}$)

$$[\![\vdash t : \mathtt{1}]\!]^n = [\![\vdash r : \mathtt{1}]\!]^n \quad \Longrightarrow \quad \exists a \in \mathcal{S} \text{ tal que } \begin{cases} t \longrightarrow^* a.\star \\ r \longrightarrow^* a.\star \end{cases}$$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Adequacy

Lema (Completeness del tipo $\mathtt{1}$)

$$[\![\vdash t : \mathtt{1}]\!]^n = [\![\vdash r : \mathtt{1}]\!]^n \quad \Longrightarrow \quad \exists a \in \mathcal{S} \text{ tal que } \begin{cases} t \longrightarrow^* a.\star \\ r \longrightarrow^* a.\star \end{cases}$$

Demo

- Por SN, SR e Intro: $t \longrightarrow^* a.\star$ and $r \longrightarrow^* b.\star$
- Por Soundness: $[\![\vdash t : \mathtt{1}]\!]^n = [\![\vdash a.\star : \mathtt{1}]\!]^n$ and $[\![\vdash r : \mathtt{1}]\!]^n = [\![\vdash b.\star : \mathtt{1}]\!]^n$
- Por hipótesis: $[\![\vdash a.\star : \mathtt{1}]\!]^n = [\![\vdash b.\star : \mathtt{1}]\!]^n \implies a \cdot id_I = b \cdot id_I$
- Como $c \mapsto c \cdot id_I$ es monomorfismo: $a = b$

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo categórico abstracto

Adequacy

Lema (Completeness del tipo $\mathbb{1}$)

$$[\![\vdash t : \mathbb{1}]\!]^n = [\![\vdash r : \mathbb{1}]\!]^n \quad \Longrightarrow \quad \exists a \in \mathcal{S} \text{ tal que } \begin{cases} t \longrightarrow^* a.\star \\ r \longrightarrow^* a.\star \end{cases}$$

Demo

- Por SN, SR e Intro: $t \longrightarrow^* a.\star$ and $r \longrightarrow^* b.\star$
- Por Soundness: $[\![\vdash t : \mathbb{1}]\!]^n = [\![\vdash a.\star : \mathbb{1}]\!]^n$ and $[\![\vdash r : \mathbb{1}]\!]^n = [\![\vdash b.\star : \mathbb{1}]\!]^n$
- Por hipótesis: $[\![\vdash a.\star : \mathbb{1}]\!]^n = [\![\vdash b.\star : \mathbb{1}]\!]^n \implies a \cdot id_I = b \cdot id_I$
- Como $c \mapsto c \cdot id_I$ es monomorfismo: $a = b$

Teorema (Adequacy)
Sean $\vdash t : A$ y $\vdash r : A$. Si $[\![\vdash t : A]\!]^n = [\![\vdash r : A]\!]^n$, entonces $t \sim r$.

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo concreto (trabajo en progreso)

- Maneggia[4] desarrolla una hiperdoctrina Lineal basada en la categoría aCD.

[4] Paola Maneggia - tesis de doctorado, 2004

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo concreto (trabajo en progreso)

- Maneggia[4] desarrolla una hiperdoctrina Lineal basada en la categoría aCD.
- Su construcción hace un lifting a una categoría de funtores que preservan Linealidad.

[4] Paola Maneggia - tesis de doctorado, 2004

Cálculo $\mathcal{L}_2^{\mathcal{S}}$: modelo concreto (trabajo en progreso)

- Maneggia[4] desarrolla una hiperdoctrina Lineal basada en la categoría aCD.
- Su construcción hace un lifting a una categoría de funtores que preservan Linealidad.
- Objetivo: construir una categoría similar a aCD de forma tal que al aplicar la construcción de Maneggia se llegue a una hiperdoctrina $\mathrm{SM}_{\mathcal{S}}$-enriquecida.

[4] Paola Maneggia - tesis de doctorado, 2004